Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho, 2009
ISBN- 978-972-8746-71-1

COMO ALUNOS DO 9.º ANO APRENDEM, COM RECURSO À TECNOLOGIA, O TEMA ÂNGULOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

Floriano Viseu
Universidade do Minho
fviseu@iep.uminho.pt

Daniela Nogueira
Escola Secundária Padre Benjamim Salgado
danielanogue@gmail.com

Esmeraldina Santos
EB 2/3 de Rebordosa
santos.esmeraldina@gmail.com

Resumo

O ambiente de aprendizagem que é proporcionado aos alunos é determinante para que estes sejam co-construtores do seu conhecimento. As actuais recomendações para o ensino de Matemática defendem abordagens indutivas, que incentivem os alunos a obter as relações, propriedades e definições dos conceitos abordados (NCTM, 2007). No caso da Geometria, aprender relações e propriedades com papel, lápis, régua, transferidor e compasso é diferente de aprender recorrendo a softwares dinâmicos, como o Geometer's Sketchpad (GSP), que liberta o aluno de actividades mecânicas e proporciona espaço para um trabalho mais dinâmico e activo. Para essa aprendizagem, torna-se fulcral a estrutura das tarefas, o tipo de materiais e o papel que o aluno desempenha nas actividades da aula. Partindo de tarefas exploratórias e com recurso ao GSP, pretendemos averiguar como alunos do 9.º ano aprendem o tema *Ângulos numa Circunferência* através da análise dos dados recolhidos por gravações das aulas em vídeo, dos trabalhos dos alunos e das perspectivas destes sobre a experiência.

Introdução

A circunferência é um dos temas que aparece contemplado nas diferentes reformulações do programa de Matemática do 3.º Ciclo, sendo abordado no 9.º ano de escolaridade com a finalidade de relacionar a circunferência e o círculo com elementos geométricos que lhes estão directamente ligados – tais como ângulos ao centro e excêntricos, cordas, arcos, tangentes, polígonos inscritos – e estudar as suas relações e propriedades (Ministério da Educação, 1991). Estes tópicos não têm variado com tais reformulações, o que já não acontece com as sugestões metodológicas presentes nos programas, como se pode constatar da análise ao programa vigente na maioria das nossas escolas do 3.º Ciclo e ao futuro programa do Ensino Básico. No programa de 1991, as sugestões metodológicas remetem para a abordagem das “propriedades relativas aos

ISBN- 978-972-8746-71-1

ângulos ao centro, arcos e cordas (…) experimentalmente, sendo depois usadas em raciocínios sobre figuras, os quais se apoiarão quando necessário nas simetrias da circunferência" (p. 57). Nesta abordagem, o programa faz referência ao papel do professor e ao material didáctico a usar. Sugere que o professor encaminhe o aluno para que "ele possa concluir qual a relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a do arco compreendido entre os seus lados [e a] partir deste conhecimento, a determinação de amplitudes de outros ângulos excêntricos surgirá como um problema a resolver" (p. 57), podendo o professor "recorrer-se ao geoplano circular como auxiliar didáctico para este assunto" (p 58).

Já as sugestões metodológicas do futuro programa apontam para uma maior valorização, por parte do professor, da actividade do aluno na exploração de conceitos e propriedades geométricas, através de diferentes tipos de tarefas:

> Na resolução de problemas geométricos, como nas tarefas exploratórias e de investigação, é importante que os alunos tenham um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo. Ao elaborarem justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo. (Ministério da Educação, 2007, p. 51)

Um papel mais interventivo do aluno no processo de ensino-aprendizagem e uma maior diversidade de tarefas são aspectos que surgem mais reforçados no futuro programa do que no que está a terminar, o que também acontece com os materiais didácticos a usar na sala de aula:

> Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Os materiais manipuláveis (por exemplo, tangram, peças poligonais encaixáveis e sólidos de enchimento em acrílico) constituem recursos cuja utilização complementa a abordagem dinâmica ao estudo da Geometria. Tanto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afectiva com a Matemática. (p. 52)

Enquanto o programa de 1991 só faz referência ao geoplano, o programa de 2007 dá ênfase ao uso de diferentes tipos de materiais didácticos, manipuláveis e tecnológicos, na actividade indutiva do aluno com tarefas de natureza exploratória e investigativa. Com tais tarefas pretende-se promover o "desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e (…) as formas de interacção em aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto" (APM, 1998, p. 79). Ao proporcionarmos aos alunos de uma turma do 9.º ano um ambiente de aprendizagem com estas características, procuramos averiguar como estes aprendem as relações e as propriedades da Circunferência com base em tarefas exploratórias, trabalho em grupo e com recurso ao GSP.

Os materiais tecnológicos na aula de Matemática

Os materiais didácticos desempenham um papel fulcral na exploração e resolução das tarefas propostas e na construção de novo conhecimento. Contrastando um passado não muito distante, em que "o material considerado necessário para o ensino-aprendizagem era o quadro e giz e o manual escolar" (Ponte & Serrazina, 1998, p. 7), hoje em dia o professor tem à sua disposição uma gama alargada de materiais que pode tirar partido. O seu uso, desde os mais simples até aos mais sofisticados, proporciona abordagens de ensino centradas no aluno, promovendo a sua actividade exploratória e o trabalho cooperativo em detrimento de práticas individualizadas e de assimilação passiva do conhecimento.

A utilização dos materiais tecnológicos no ensino-aprendizagem de Matemática – com maior destaque para as calculadoras e o computador – é cada vez mais recomendada, dada a forte presença destes materiais na sociedade em que vivemos. Justifica-se a sua utilização nas aulas de Matemática por realizarem cálculos de um modo eficiente, facilitarem a organização e análise de dados, fornecerem imagens visuais dos conceitos matemáticos e apoiarem a actividade exploratória e investigativa dos alunos na realização dos seus trabalhos. O uso de materiais tecnológicos pode apoiar assim uma aprendizagem significativa, sobretudo no que respeita ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, autonomia e pensamento crítico, e de uma atitude positiva em relação à Matemática. Com estes materiais não se pretende substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas sim combinar adequadamente os diferentes processos de cálculo, sem esquecer o cálculo mental, e proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem de cunho laboratorial (Ministério da Educação, 2002). Não se pretende também com tais materiais substituir as compreensões e intuições básicas, mas que ajudem a aprofundar essas compreensões e intuições, envolvendo activamente os alunos na actividade matemática e evitando que sejam meros espectadores do que se passa na sala de aula (NCTM, 2007).

Entre os materiais tecnológicos, o computador, pelas suas potencialidades, permite o desenvolvimento de actividades de exploração e pesquisa através de uma diversidade de programas que possibilitam abordagens enriquecedoras dos conceitos matemáticos. A sua utilização na aula relativiza a importância da aquisição da capacidade de cálculo e de manipulação simbólica, reforça o papel da linguagem gráfica e as diferentes representações dos conceitos matemáticos, potencia o desenvolvimento de capacidades de ordem mais elevada do que o cálculo e a memorização e favorece a realização de actividades mais desafiantes do que a resolução de exercícios para aplicação dos conhecimentos apreendidos (Fernandes, Alves, Viseu & Lacaz, 2006).

A interacção entre os alunos na apresentação e discussão dos seus resultados desenvolve a sua capacidade de análise, crítica e de concentração (Santos, 2000). O *software* de geometria dinâmica, como por exemplo o GSP, favorece essa interacção, ao colocar à disposição do professor e do aluno de um construtor rigoroso para qualquer construção com régua e compasso da geometria euclidiana, podendo ser utilizado como um processo de visualização no ensino da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular. Este tipo de *software* proporciona a exploração e a descoberta. Os alunos podem construir, rever, modificar as suas construções geométricas e testar as suas ideias matemáticas e conjecturas e envolverem-se na sua própria aprendizagem (King & Schattschneider, 2003).

Por razões várias, tais como a pressão de cumprir os programas e a falta de preparação para usar o computador, condicionam, como referem Ponte, Matos e Abrantes (1998), uma maior utilização do computador na sala de aula. Segundo estes autores, muitos professores manifestam dificuldades de considerar o computador nas suas planificações e de organizar as actividades na sala de aula integrando este recurso. Consideram que estas dificuldades podem dever-se às concepções do professor sobre o ensino-aprendizagem da Matemática, nomeadamente o papel da actividade do aluno na descoberta dos conceitos.

Compreender como os alunos aprendem

As recomendações actuais para o ensino de Matemática sugerem a compreensão por parte dos professores das formas como os seus alunos aprendem os conteúdos matemáticos (NCTM, 2007). Davis (2006), ao debruçar-se sobre formas do professor de Matemática poder evidenciar a compreensão nos seus alunos, apresenta um modelo para "*Compreender como os alunos compreendem a Matemática*" que nos remete para pontos importantes a considerar numa aula: (1) Exploração, (2) Generalização e (3) Aplicação. Na exploração, o autor identifica os procedimentos que dão relevância aos exemplos e contra-exemplos e às características que emergem do conceito a partir da actividade do aluno. Na generalização, destaca na actividade deste as suas justificações sobre o que diz, o porquê de uma generalização ser verdadeira e porque os procedimentos funcionam. O autor considera que quando um aluno compreende porque uma dada generalização é verdadeira tende a ser capaz de reconhecer a sua aplicabilidade em contextos não familiares. Na aprendizagem dos conceitos matemáticos torna-se necessário compreender o funcionamento dos processos. Na perspectiva do autor, importa que o aluno seja capaz de mostrar, passo por passo, a outro colega como efectua um dado procedimento e identificar os seus próprios erros. Assim, dá a conhecer a sua compreensão através das respostas e das explicações plausíveis que apresenta e através do reconhecimento da aplicação do que aprende a novas situações, sendo capaz de mostrar a sua veracidade usando objectos e modelos.

ISBN- 978-972-8746-71-1

Metodologia

Este estudo procurou averiguar a forma como alunos do 9.º ano aprendem as relações e as propriedades entre os elementos de uma Circunferência com recurso ao GSP, através da exploração de construções geométricas, da formulação e validação de conjecturas e da aplicação dos conhecimentos que aprenderam. Ao seguir uma estratégia de ensino centrada na actividade dos alunos, a professora[1] desempenhou um papel de orientadora das actividades propostas. No início da experiência que relatamos, os alunos foram informados da estratégia a seguir nas aulas sobre o estudo da Circunferência. O *software* GSP já lhes era familiar, pois a professora costuma utilizá-lo nas suas aulas, o que facilitou as actividades desenvolvidas.

Os participantes deste estudo foram os 27 alunos de uma turma do 9.º ano, constituída por 17 raparigas e 10 rapazes com idades compreendidas entre os 14 e os 16 anos. É uma turma que a professora acompanha desde o 7.º ano de escolaridade e que apresenta um percurso escolar pautado por algum sucesso a Matemática.

As tarefas propostas aos alunos foram elaboradas de acordo com o modelo de Davis (2006), passíveis de promover momentos de exploração, generalização e aplicação. A experiência decorreu no terceiro período do ano lectivo de 2008/09 e desenvolveu-se em duas fases. A primeira fase, a de exploração e generalização, teve a duração de dois blocos de 90 minutos, um para a abordagem das relações entre os ângulos e os arcos correspondentes e outra para a abordagem das propriedades da circunferência. Na segunda fase, de oito blocos de 90 minutos, os alunos aplicaram os conceitos estabelecidos na resolução de tarefas e no desenvolvimento de um trabalho de pesquisa sob o tema "*À procura de relações/propriedades da circunferência no dia-a-dia*".

Os trabalhos desenvolvidos foram realizados em grupos de três alunos, distribuídos por nove computadores. A recolha de dados foi efectuada através da visualização dos vídeos das aulas (OVAi, em que i representa o número da aula), e do preenchimento de um questionário por estes sobre as suas perspectivas acerca da experiência. Como a turma foi dividida em 9 grupos (G1 a G9), identificamos a intervenção de cada um deles por AiGj, em que Ai representa o número atribuído a cada aluno no seu grupo e Gj o número do grupo a que pertence (por exemplo, A1G2 representa o aluno 1 do grupo 2).

Estudo da Circunferência com recurso ao Sketchpad

Na abordagem do tema da Circunferência foram tratados os tópicos ângulos ao centro, ângulos inscritos e propriedades da circunferência (ângulos e cordas correspondentes, tangente e ângulo formado com o raio da circunferência).

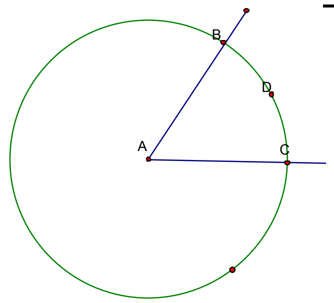
Ângulos ao centro e ângulos inscritos de uma circunferência

[1]Uma das autoras deste texto

ISBN- 978-972-8746-71-1

Exploração. A relação entre a amplitude do ângulo ao centro e do ângulo inscrito com a do seu arco correspondente foi obtida a partir da construção efectuada pelos alunos no GSP. Com a ajuda deste *software* registaram alguns resultados, como exemplifica os que foram obtidos pelo G3 (Tabela 1):

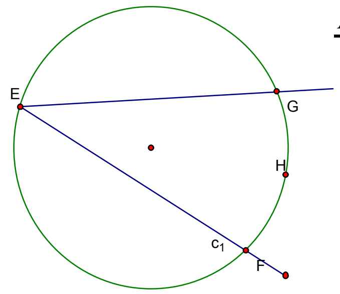
Tabela 1: Recolhas das amplitudes de ângulos ao centro e dos arcos correspondentes de uma circunferência pelo G3.



Amplitude do ângulo BAC	Amplitude do arco BDC
58,87º	58,87º
44,65º	44,65º
20,81º	20,81º
19,78º	19,78º
77,92º	77,92º
55,85º	55,85º
38,57º	38,57º
20,79º	20,79º
1,37º	1,37º
12,56º	12,56º

Através das potencialidades do GSP, os alunos movimentaram o ponto B, ou C, e recolheram as amplitudes de vários ângulos ao centro de uma circunferência e as amplitudes dos seus arcos correspondentes. Ao compararem os valores recolhidos, aperceberam-se que independentemente da abertura do ângulo e do raio da circunferência existe uma relação entre o ângulo ao centro e o arco correspondente. Uma estratégia semelhante foi seguida pelos alunos para relacionar a amplitude dos ângulos inscritos de uma circunferência com a dos seus arcos correspondentes, como exemplifica os dados recolhidos pelo G1 (Tabela 2)

Tabela 2: Recolha das amplitudes de ângulos ao centro e dos arcos correspondentes de uma circunferência pelo G1.



Amplitude do ângulo FEG	Amplitude do arco GHF
38.44º	76.93º
44.18º	88.37º
39.46º	78.92º
42.70º	35.39º
40.94º	81.80º
12.20º	24.40º
5.74º	11.48º
39.70º	79.40º
4.97º	9.95º
28.06º	56.13º

Ao movimentarem os pontos sobre a circunferência, os alunos observaram e registaram os diferentes valores que foram obtendo através das medições no GSP.

Generalização. Na sequência das actividades desenvolvidas, consideramos que alguns alunos generalizaram as relações que estabeleceram nas conclusões que apresentaram à turma, como exemplifica a conclusão apresentada pelo G3 sobre o ângulo ao centro – "a relação entre eles é

ISBN- 978-972-8746-71-1

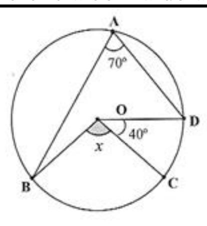
igual" – e a conclusão apresentada pelo G5 sobre o ângulo inscrito – "os ângulos correspondentes a um determinado arco têm metade da amplitude desse arco". Nesta fase da experiência, verificámos que alguns alunos procuravam certezas quando tentavam generalizar as suas conjecturas e as discutiam com os seus colegas:

A3G1: Não dá!
A2G1: Dá, dá! Qual é a diferença?
A3G1: É de uma centésima.
A2G1: Isso é do arredondamento, quando divides por dois o arco! (OVA_1)

Porém, alguns alunos tentaram que fosse a professora a estabelecer as generalizações com questões do tipo "como é que eu posso dizer isto?" (G2). Perante tais questões, a professora em vez de lhes dar resposta procurou direccioná-las para o próprio grupo: "cheguem vocês às conclusões pretendidas" (OVA_1). Após terem definido as relações existentes entre as amplitudes dos ângulos ao centro e inscritos e a dos seus arcos correspondentes, os alunos aplicaram em grupo as suas generalizações.

Aplicação. Depois de descobrirem as relações pretendidas, o grau de compreensão dos alunos sobre as relações estabelecidas emergiu na resolução de tarefas simples e no desenvolvimento de um trabalho de aplicação do que aprenderam em situações do dia-a-dia. Na aplicação em situações simples, percebe-se que os alunos compreenderam as relações estabelecidas – entre as amplitudes do ângulo ao centro e inscrito e as do arco correspondente – através das justificações que apresentaram na resolução de exercícios, como exemplifica a justificação dada pelo G1 (Tabela 3):

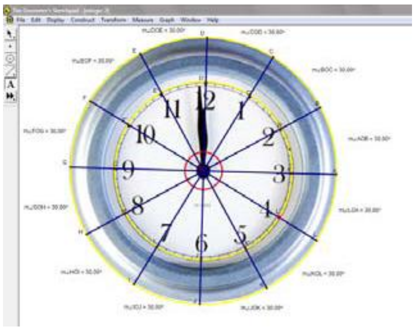
Tabela 3: Aplicação pelo G1 das relações entre as amplitudes dos ângulos ao centro e inscrito de uma circunferência com a do arco correspondente.

	$x = 100$ porque o ângulo BAD tem o arco que corresponde à soma do arco BC com o arco CD que por sua vez é 140º. Subtraindo o arco CD ao BD, obtemos o arco BC (140º-40º=100º). Sabemos que os ângulos ao centro têm a mesma amplitude que os seus arcos correspondentes. Logo BOC=100º.

Na aplicação do que aprenderam em situações do dia-a-dia, os alunos descobriram situações onde demonstraram a compreensão das relações estabelecidas, como exemplificam os trabalhos elaborados pelo G4 e pelo G1 (Tabela 4):

ISBN- 978-972-8746-71-1

Tabela 4: Aplicação pelo G4 e pelo G1 das relações entre as amplitudes dos ângulos ao centro e inscrito de uma circunferência com a do arco correspondente em situações do dia-a-dia.



Os ângulos formados são todos ao centro o que indica que a amplitude do ângulo é igual à amplitude dos arcos formados pelos ângulos, e são, também, geometricamente iguais pois as suas amplitudes são todas iguais. Sendo os ângulos todos geometricamente iguais, os arcos formados têm todos a mesma amplitude. (Grupo 4)

$m\angle ABC = 46{,}16°$

$m\,\widehat{AC}$ on $\odot DE = 92{,}31°$

ângulo inscrito

$m\angle FDC = 59{,}90°$

$m\,\widehat{FC}$ on $\odot DE = 59{,}90°$

ângulo ao centro

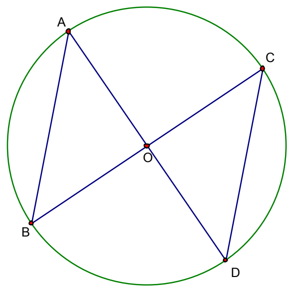
O símbolo da Volkswagen é construído a partir de ângulos ao centro e ângulos inscritos. Aqui podemos ver que as propriedades que aprendemos se verificam! (Grupo 1)

Os alunos usaram os seus conhecimentos para comprovar que as relações que estabeleceram se verificavam em objectos comuns, como são exemplos as que estabeleceram num relógio de parede e no símbolo da marca de um automóvel.

Propriedades da circunferência

Exploração. Os vários grupos efectuaram as construções e realizaram todos os procedimentos necessários de modo a recolher os dados que lhes permitissem descobrir as diferentes propriedades, como é o exemplo a construção efectuada pelo G8 para estabelecer a propriedade que relaciona Cordas e Ângulos ao Centro (Tabela 5):

Tabela 5: Relação entre ângulos ao centro e cordas correspondentes estabelecida pelo G8.



Comprimento de AB: 3,73 cm
Comprimento de DC: 3,73 cm
Amplitude do ângulo AOB: 73,83º
Amplitude do ângulo COD: 73,83º

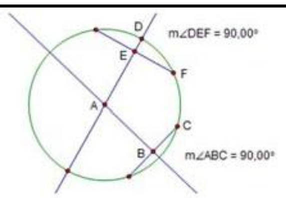
Depois de alterar o comprimento do raio
Comprimento de AB: 2,02 cm
Amplitude do ângulo AOB: 82,16º
Comprimento de DC: 2,02 cm
Amplitude do ângulo COD: 82,16º

Outra das propriedades investigadas foi a que permite determinar o centro da circunferência a partir de pelo menos duas das suas cordas. Após a construção das mediatrizes de duas cordas, os

ISBN- 978-972-8746-71-1

alunos verificaram que estas se intersectavam no centro da circunferência, tal como sugere a resolução efectuada pelo G4 (Tabela 6):

Tabela 6: Relação entre as mediatrizes das cordas e o centro de uma circunferência estabelecida pelo G4.

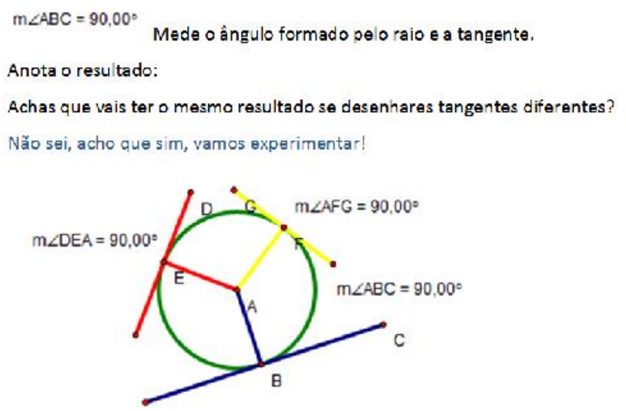


O que estas cordas têm em comum é o facto de formarem ambas ângulos de 90 graus com o diâmetro correspondente.

Apesar dos alunos do G4 reconhecerem que as perpendiculares a uma corda no seu ponto médio passam pelo centro da circunferência, não foram capazes de expressar de forma clara e matematicamente correcta a sua ideia.

A propriedade que relaciona a tangente a uma circunferência com o seu raio no ponto de tangência foi efectuada pelo G5 através de uma construção similar à do G4 (Tabela 7):

Tabela 7: Relação entre tangente e o raio no ponto de tangência estabelecida pelo G5.



Porém, na procura desta propriedade, os alunos de alguns grupos solicitaram frequentemente a professora com o intuito de esclarecer dúvidas – “temos dúvidas nesta stora!” (OVA2) –, ou de encontrar as respostas mais facilmente – “mas como é que eu posso dizer isto?” (OVA2). Apesar destas tentativas dos alunos, a professora limitou-se a orientá-los e a evitar direccioná-los na sua actividade.

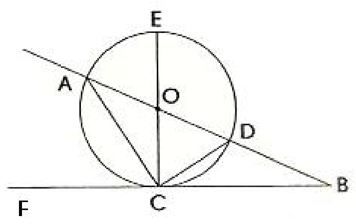
Generalização. Nesta fase, os alunos apresentaram argumentos plausíveis para justificar a veracidade das relações estabelecidas, conforme ilustra a conclusão a que o G6 chegou: “Como construímos muitas tangentes e deu sempre 90º podemos dizer que a tangente forma sempre um ângulo recto com o raio no ponto em que toca na circunferência”. Constatamos que a maior parte dos alunos se apercebeu da necessidade de fazerem mais do que uma construção para poderem estabelecer esta relação, como exemplifica o diálogo que se estabeleceu entre os alunos do G1 e a professora:

A1G1: Já escrevemos a regra.
P: Quantos resultados anotaram?
A2G1: Dois.
P: Acham que dois resultados são suficientes para terem a certeza da regra que estabeleceram?
A1G1: Acho que sim!
P: Experimentem mais alguns!
A2G1: Afinal não funciona!
A1G1: Deixa ver, experimenta outro
A2G1: É, dá noventa eu é que medi mal. (OVA2)

Desta forma, os alunos aperceberam-se que uma recta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

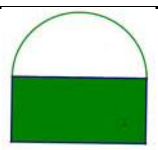
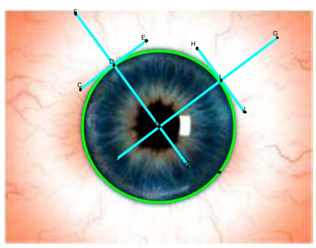
Aplicação. A maior parte dos alunos foi capaz de reconhecer a aplicabilidade da generalização em situações simples, como por exemplo, na resolução de alguns exercícios, os elementos do G5 justificaram assim a sua resposta:

Tabela 8: Exercício que envolve ângulos ao centro e inscritos resolvido pelo G5.

	$A\hat{C}B = 110^{\circ}$, porque o ângulo ECB=90º pois CB é tangente à circunferência no ponto C e este é o vértice do ângulo no qual EC é o diâmetro da circunferência. Somando o ângulo ACE que já vimos ter 20º ao ângulo recto ECB, obtemos ACB. (G5)

Outras aplicações interessantes foram realizadas pelo G2 e pelo G7, ao procurarem as relações estudadas numa ponte e na vista de uma pessoa, como é ilustrado na Tabela 9:

Tabela 9: Exemplos da aplicação das propriedades apresentados pelos G1 e G7.

 	No arco desta ponte conseguimos identificar um semi-circulo e um rectângulo construído através de duas tangente ao raio da circunferência
	Para descobrir o centro fizemos duas tangentes, CE e HJ. CE é tangente à circunferência em D. Fizemos uma perpendicular à recta CE em D. HJ é tangente à circunferência em I, fizemos uma perpendicular à recta HJ em I. O ponto de cruzamento das duas tangentes indica-nos o centro da circunferência. Pode ajudar a quem trabalha em óptica na construção dos óculos e medição dos olhos!

ISBN- 978-972-8746-71-1

Através das aplicações efectuadas, os alunos manifestaram ter compreendido as relações e as propriedades entre os elementos de uma circunferência.

Perspectivas dos alunos sobre a experiência

As perspectivas dos alunos em relação à experiência realizada foram obtidas através de um questionário constituído por questões fechadas e abertas. Com as questões fechadas, os alunos manifestaram o seu grau de apreciação em relação ao tema abordado, à estratégia seguida e ao uso do GSP (Tabela 10).

Tabela 10: Perspectivas dos alunos sobre o estudo da Circunferência com recurso ao GSP (n=27).

	Afirmações	DT	D	I	C	CT
1.	A Circunferência foi um tema que considero ser mais difícil do que outros temas de Matemática.	7	10	9	1	0
2.	A estratégia usada para estudar a Circunferência foi importante.	0	0	8	13	6
3.	Gostaria de aprender outros temas de Matemática com a mesma estratégia.	0	4	9	7	7
4.	Reconheço algumas relações entre os elementos da Circunferência em situações do quotidiano.	0	0	6	11	10
5.	O tema que estudei despertou o meu interesse para a Geometria.	0	4	13	9	1
6.	Descobrir por mim próprio os conteúdos matemáticos é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-los.	0	3	13	9	2
7.	Aprendo melhor quando tenho de pensar por mim próprio do que quando o professor pensa por mim.	1	1	6	11	8
8.	Aprendo melhor quando posso discutir com os meus colegas os meus processos e os resultados.	0	0	6	17	4
9.	O GSP permitiu-me visualizar melhor as construções efectuadas numa Circunferência do que as efectuadas no quadro.	0	1	5	10	11
10.	O GSP permitiu-me descobrir as relações e as propriedades estabelecidas na Circunferência.	0	0	8	12	7
11.	Globalmente, gostei da forma como aprendi o tema da Circunferência.	0	0	8	13	6

No que diz respeito ao estudo da Circunferência com recurso ao GSP, 63% dos alunos não considera este tema difícil, 70% concorda ou concorda totalmente que a estratégia utilizada foi importante, 78% reconhece as relações estudadas no quotidiano e 70% diz que aprende melhor quando tem a oportunidade para pensar e discutir com os colegas os seus resultados e processos. Porém, 48% dos alunos refere que lhes é indiferente descobrir por eles próprios os conteúdos matemáticos ou serem apresentados pelo professor.

Relativamente ao uso do GSP, 78% considera que este *software* lhes permitiu visualizar melhor as construções efectuadas do que as efectuadas no quadro e 70% dos alunos considera que lhes favoreceu a descoberta das relações e das propriedades estabelecidas na Circunferência.

Finalmente, a maioria dos alunos apreciou a forma como aprendeu o tema da Circunferência (70%).

Com as questões abertas, os alunos exprimiram as suas ideias acerca do modo como aprenderam ao longo da experiência, tendo 33% referido que notaram diferenças na abordagem da Circunferência em relação ao ensino de outros temas de Matemática. Este valor parece-nos dever-se ao desenvolvimento habitual pela professora de estratégias idênticas à que foi proporcionada nestas aulas. Grande parte dos alunos (83%) refere não ter sentido dificuldade no estudo deste tema mas assume ter recorrido frequentemente aos colegas (37%) e à professora (55%) quando sentiram dificuldades.

Relativamente aos aspectos mais positivos da experiência, referem várias vezes o facto de ser um tema que se pode encontrar na vida real (62%), que foi o trabalho com o GSP (55%), a possibilidade de construir figuras com rigor (48%), o trabalho de grupo (37%), compreender melhor quando visualizam as construções (43%) e terem oportunidade de pensar por si (17%). Como sugestão para uso de outros materiais, 80% aponta a possibilidade de usar novamente o GSP e 20% o quadro interactivo. Finalmente, 59% dos alunos refere não ter sentido nenhuma dificuldade por considerar o tema fácil, o que já não aconteceu com 26% dos alunos que sentiram dificuldades em descobrir as amplitudes de alguns ângulos e com 15% que sentiram dificuldades em aplicar as propriedades.

Conclusões

De modo a compreender como alunos do 9.º ano aprendem o tema ângulos numa circunferência, proporcionámos um ambiente de aprendizagem baseado no trabalho de grupo, em tarefas exploratórias e com o recurso ao GSP. Ao trabalharem em grupo, a maior parte dos alunos construiu figuras geométricas, explorou as construções efectuadas, mediu as amplitudes de ângulos e de arcos, o comprimento de cordas e estabeleceu as relações e as propriedades da circunferência. Consideramos que o trabalho em grupo lhes permitiu expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar dúvidas e discutir processos e soluções. Movendo pontos, puderam registar os valores obtidos, relacioná-los e estabelecer as relações e as propriedades pelas suas próprias palavras, o que vai de encontro ao que Davis (2006) chama de transição da exploração dos conceitos para a sua generalização. Nessa transição, tornou-se crucial a natureza exploratória das tarefas propostas, a possibilidade de mexer as construções efectuadas e a possibilidade de poderem comparar os dados obtidos, o que se torna possível com softwares dinâmicos como o GSP, o que, como defendem King e Schattschneider (2003), favorece o envolvimento dos alunos na construção da sua própria aprendizagem.

Após terem estabelecido tais relações e propriedades, os alunos aplicaram os seus conhecimentos em dois tipos de tarefas: (1) em exercícios idênticos aos propostos no manual escolar, para sistematizaram os conhecimentos adquiridos; (2) em situações do dia-a-dia onde pudessem apalicar o que aprenderam. Neste tipo de tarefa, os alunos aplicaram o que aprenderam quer em objectos concretos que se encontram à sua volta, quer em situações mais complexas como foi o caso da ligação aos problemas de óptica. Davis (2006) considera que este tipo de actividade faz com que os alunos possam evidenciar a sua compreensão sobre o porquê dos seus processos.

Relativamente às percepções dos alunos, verificamos que a maior parte deles refere discordar totalmente ou a discordar que o tema da geometria é mais difícil que outros temas, o que evidencia a predisposição que manifestaram para trabalhar este tema com motivação. Verificamos também o considerável número de alunos que valorizou o pensar por si próprio ou o uso do GSP nas construções, o que vai de encontro às sugestões do NCTM (2007) de promover estratégias de ensino que evitem que os alunos sejam meros espectadores do que acontece na sala de aula. Quanto aos aspectos positivos mais apontados foram essencialmente a utilidade do GSP como ferramenta de suporte nas construções que efectuaram e a aplicabilidade dos conceitos e relações estabelecidas ao quotidiano. A experiência desenvolvida foi do interesse e do agrado da maioria dos alunos, o que reflecte o seu envolvimento nas actividades das aulas e a produção de trabalhos com imaginação e criatividade. O facto da maioria dos alunos referir que este estudo os incentivou a olhar com mais atenção para o mundo que os rodeia, em busca da aplicação das situações aprendidas na sala de aula, é um indicador do grau de compreensão do que aprenderam sobre a circunferência. As principais dificuldades evidenciadas por alguns alunos prenderam-se com a verbalização das suas ideias numa linguagem clara, concisa e matematicamente correcta.

De um modo geral, os alunos demonstraram ter aprendido os conceitos abordados e mostraram-se satisfeitos com os resultados obtidos. O papel do GSP e da professora foi de apoio e de orientação à actividade dos alunos. Os recursos uitilizados serviram, como afirmam Ponte et al. (1998) e Santos (2000), de motivação, ferramenta de trabalho e meio de envolver os alunos na descoberta de novas relações.

Referências bibliográficas

APM (1998). Matemática 2001: *Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de professores de Matemática.

Davis, E: J. (2006). A model for understanding understanding in mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12 (4)*, 190-197.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F., & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de Informação e Comunicação no currículo de matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*.

ISBN- 978-972-8746-71-1

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática – ensino básico, 3.º ciclo: plano de organização do ensino-aprendizagem (vol. 2)*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino Básico*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação da Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (1998). *As novas tecnologias na formação inicial de professores*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Santos, E. (2000). O computador e o professor: Um contributo para o conhecimento das culturas profissionais de professores. *Quadrante*, *9(2),* 55-81.

King, J. R., & Schattschneider, D. (2003) (Orgs.). *Geometria dinâmica: selecção de textos do livro (Geometry turned on!)"*. Lisboa: APM.